1170. 或ル種ノ函數方程式ニ就イテ

春木　博（神戸高商船）

§1. 南雲，角谷両先生ハ全国紙上数学談話会第66号ニ於テ次ノ美麗ナル定理ヲ証明サレタ。

$\boxed{\text{定理1}}$　$f(x,y)$ ヲ $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ デ定義サレタ一價実数値連續函数トスル。平面上ノ任意ノ点 P ヲ中心トシテ，任意ノ半径ノ円ヲエガキ，ソノ周囲ヲ n 等分シ、ソノ分点ヲ夫々 Q_1, Q_2, Q_3, -----, Q_n トスルトキ，常ニ

$$\frac{1}{n}\left\{f(Q_1)+f(Q_2)+f(Q_3)+\cdots\cdots+f(Q_n)\right\}=f(P)$$

ナラバ，$f(x,y)$ ハ複素係数ヲ持ツ複素数変数ノ高々 $n-1$ 次ノ多項式ノ実数部，即チ $R(a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_{n-1}z^{n-1})$ ニ等シイ。又解ハコレニ限ル。$(z=x+iy)$

次ニコノ定理ニ於テ、$n=3$ ノトキノ幾何學的意味ヲ更ニ求メテ見ヨウ。

上ノ定理ヲ $n=3$ ノトキニ、云ヒ換ヘレバ次ノ様ウニナル。

$\boxed{\text{定理2}}$ $f(x,y)$ ヲ $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$ デ定義サレタ一價實數値連續函數トスル。平面上ニ任意ノ正三角形 $Q_1Q_2Q_3$ ヲ画ガクトキ、三頂点 Q_1, Q_2, Q_3 デ $f(x,y)$ ガ取ル値ノ算術平均ガ $\triangle Q_1Q_2Q_3$ ノ重心 P デ取ル値 $f(P)$ ニ常ニ等シイナラバ $f(x,y)$ ハ複素係數ヲ持ツ複素數変數ノ高々二次ノ多項式ノ実数部，即チ $R(a_0+a_1z+a_2z^2)$ ニ等シイ。又解ハソレニ限ル。$(z=x+iy)$

コヽデ，$R(a_0+a_1z+a_2z^2)$ ハ x, y ノ調和函數ナル故、結局 $f(x,y)$ ハ $f(x,y)=a(x^2-y^2)+bxy+cx+dy+e$ ノ形ニ書ケル。茲ニ a, b, c, d, e ハ任意ノ実常數ナリトスル。

サテ解析幾何學ニ次ノ定理ガアル。

(*Poncelet* – *Brianchon* ノ双曲線ニ関スル定理)

直角双曲線上ニ、三頂点 Q_1, Q_2, Q_3 ヲ持ツ三角形 $Q_1Q_2Q_3$ ノ垂心ハソノ直角双曲線上ニアル。

(系) 直角双曲線上ニ、三頂点 Q_1, Q_2, Q_3 ヲ持ツ正三角形 $Q_1Q_2Q_3$ ノ重心ハソノ直角双曲線上ニアル。

コノ系ヲ上述ノ函數方程式ノ結果ヨリ証明シテ見ヨウ。

$f(x,y)=a(x^2-y^2)+bxy+cx+dy+e$ トシ，定理２ニ於テ $f(x,y)=0$ ナル曲線ヲ考ヘレバ之ハ直角双曲線ノ一般形デアル。

ソノ上ノ三点 Q_1，Q_2，Q_3 ハ $f(x,y)$ ノ零点ニアタル。故ニ定理２ノ結果ヨリ

$$f(P)=\frac{1}{3}\{f(Q_1)+f(Q_2)+f(Q_3)\}$$

故ニ　$f(P)=\frac{1}{3}(0+0+0)=0$

故ニ点Ｐハ $f(x,y)$ ノ零点トナリ、従ツテＰハ直角双曲線上ニアルコトガ証明サレタ。

次ニ函数 $f(x,y)=a(x^2-y^2)+bxy+cx+dy+e$ ヲ他ノ似タ方面カラ考ヘテ見マシ。

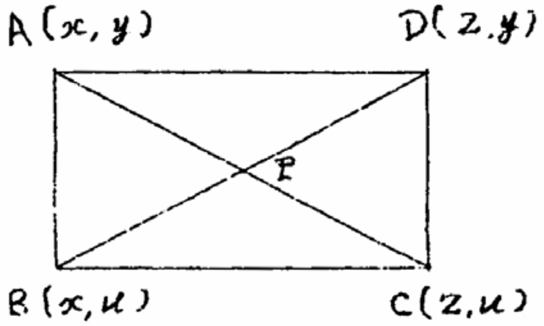
先ヅ定理３ヲ証明スル。

$\boxed{\text{定理３}}$　$f(x.y)$ ヲ $-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$ ニテ定義サレタ一価実数値函数トシ，x 及ビ y ニツイテ夫々可測ナリトスル。今平面上ニ、x 軸，y 軸ニ夫々平行ナ辺ヲ持ツ任意ノ矩形ＡＢＣＤヲエガキ、其ノ重心（中心）ヲＰトスルトキ、常ニ

$$f(P)=\frac{1}{4}\{f(A)+f(B)+f(C)+f(D)\}$$

ナラバ　$f(x,y)=axy+bx+cy+d$ トナル。又解ハソレニ限ル。故ニ a,b,c,d ハ任意ノ実数ナリトスル。

（証明）　点Ａノ座標ヲ (x,y)，点Ｃノ座標ヲ (z,u) トスレバ Ｂ，Ｄノ座標ハ夫々 (x,u)，(z,y) トナリ、又Ｐノ座標ハ



$\left(\frac{x+z}{2}, \frac{y+u}{2}\right)$ トナルカラ、与ヘラレタ函数方程式ハ次ノヤウニ書ケル。

$$f\left(\frac{x+z}{2}, \frac{y+u}{2}\right) = \frac{1}{4}\left\{f(x, y) + f(x, u) + f(z, u) + f(z, y)\right\}$$

コノ式ニ於テ $u = y$ トスレバ

$$f\left(\frac{x+z}{2}, y\right) = \frac{1}{4}\left\{f(x, y) + f(x, y) + f(z, y) + f(z, y)\right\}$$

故ニ

$$f\left(\frac{x+z}{2}, y\right) = \frac{1}{2}\left\{f(x, y) + f(z, y)\right\}$$

$f(x, y)$ ハ x ニツイテ可測ナル故、之ヨリ

$$f(x, y) = \alpha(y)x + \beta(y)$$

同様ニシテ $f(x, y)$ ハ y ニツイテ可測ナル故、結局 $f(x, y)$ ハ y ニツイテモ linear トナル。

結局 $f(x, y) = axy + bx + cy + d$

茲ニ a, b, c, d ハ任意ノ実常数ヲ表ス。

コノ結果ニ於テ座標軸ヲ廻転サセルコトニヨリ次ノ定理4ヲ得ルコトハ明カデアル。

$\boxed{\text{定理4}}$ $f(x, y)$ ヲ $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ デ定義サレタ一價實數値函數デ x 及ビ y ニツイテ、夫々可測ナリトスル。今 x 軸ト一辺ガ一定角 α (正ノ方向ニ) ヲナス任

意ノ矩形ABCDヲヱガキ，ソノ重心（中心）ヲPトスルトキ常ニ $f(P)=\frac{1}{4}\{f(A)+f(B)+f(C)+f(D)\}$ ナラバ，
$f(x,y)=a(x^2-y^2)+bxy+cx+dy+e$ トナル。又解ハソレニ限ル。茲ニ a,b,c,d,e ハ実常数デ $b=-2a\cot 2\alpha$ ナリトスル。

序デナガラ，$\boxed{\text{定理3}}$ヲ更ニ云ヒ換ヘルト次ノ様ニナル。

$\boxed{\text{定理}3'}$ $f(x,y)$ ヲ $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$ デ定義サレタ一価実数値函数デ，x 及ビ y ニツイテ夫々可測ナリトスル。今 x 軸及ビ y 軸ニ夫々平行ナ辺ヲ持ツ任意ノ矩形ヲABCDトスルトキ，三次元空間ニ於テ $z=(x,y)$ ナル曲面上ノ四点 $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ ヲ四頂点トスル四面体ノ重心ガ常ニ曲面 $z=f(x,y)$ ノ上ニアルナラバ，$f(x,y)=axy+bx+cy+d$ デアル。又解ハソレニ限ル。

茲ニ a,b,c,d ハ任意ノ実常数デアル。$z=f(x,y)$ ハ一般ニ双曲抛物線面ヲアラハス。

§2. $f(x)$ ヲ $x>0$ デ定義サレタ一価実数値函数トスルトキ，次ノ函数方程式ニ適スルモノヲ求メヨウ。但シ α ハ正ナル実常数トスル。

(1) $f(\alpha x)=f(x)$

$g(x)=f(e^x)$ トオケバ $g(x)$ ハ $-\infty<x<+\infty$ デ定義サレタ一價實数値函数デ (1) カラ容易ニ判ルヤウ

ニ

$$g(x+\log\alpha)=g(x)$$

ヲ満足サセル。

故ニ　$f(x)=g(\log x)$

之ガ(1)ヲ満足スルコトハ明ラカデアル。故ニ $g(x)$ ハ $-\infty<x<+\infty$ デ定義サレタ $\log\alpha$ ヲ週期トスル任意ノ一価実数値函数トスル。

次ニ、$f(x)$ ヲ $x>0$ デ定義サレタ一価実数値函数トスルトキ、次ノ函数方程式ヲ満足サセルモノヲ求メヨウ。但シ α,β ハ正ノ常数トスル。

(2)　$f(\alpha x)=f(\beta x)$

(2)ニ於テ x ノ代リニ $\frac{x}{\beta}$ トオケバ

$$f\left(\frac{\alpha}{\beta}x\right)=f(x)$$

結局(1)ナル函数方程式ニ帰着サレタコトニナル。故ニ求ムル解ハ $g(x)$ ヲ $-\infty<x<+\infty$ デ定義サレタ一価実数値函数デ $\log\frac{\alpha}{\beta}$ ヲ週期トスル任意ノ函数トスレバ $f(x)=g(\log x)$ ニテ与ヘラレル。

次ニ $f(x)$ ヲ $-\infty<x<+\infty$ デ定義サレタ一価実数値連続函数トシ、次ノ函数方程式ニ適スルモノヲ求メヨウ。但シ, a,b ハ実常数デ $|a|\neq 1$ ナリトスル。

(3)　$f(ax+b)=f(x)$

先ヅ $|a|<1$ ノ時カラ始メル。

(3) ヨリ任意ノ自然数nニ對シ

$$f(x)=f(a^n x+a^{n-1}b+a^{n-2}b+\cdots\cdots+b)$$

ヲ得ル。即チ

$$f(x)=f\left\{a^n x+\frac{b(1-a^n)}{1-a}\right\}$$

茲デ、$n\to\infty$ナラシムレバ$|a|<1$デ$f(x)$ガ連續ナルコトカラ

$$f(x)=f\left(\frac{b}{1-a}\right)$$

即チ　$f(x)\equiv constant$

ヲ得ル。

次ニ$|a|>1$ナラバ (3) ヨリ

$$f(x)=f\left(\frac{x}{a}-\frac{b}{a}\right)$$

カウスレバ$\left|\frac{1}{a}\right|<1$トナルカラ前ト同様ニシテ

$$f(x)\equiv constant$$

結局求メル解ハ

$$f(x)\equiv constant$$

§3. $f(x)$ヲ$-\infty<x<+\infty$デ定義サレタ一價實數値函數トシ、$f(x)$ニ何等解析的性質（連續性、微分可能性，可測性）ヲ與ヘナイトスル。コノ時函數方程式

(4)　$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$

ヲ満足セシメル$f(x)$ハ如何ナル形ヲ持ツカ。$f(x)\equiv 0$ハ

険リ。

直チニ豫想セラレルコトハ $h(x)$ ヲ適當ナ Hamel ノ解（函數方程式 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ノ解ヲ指ス）トスルトキ

$$\cos[h(x)],\quad \cosh[h(x)]$$

ト書ケハシナイカト云フコトデアル。以前筆者ハ雑誌函數方程式第二十三号ニ於テ、此ノ方程式ヲ論ジタガ、ソコデハ解ガ $f(x)\geqq 1$ ナルトキト $|f(x)|\leqq 1$ ナルトキニ分シ、又 $f(x)\geqq 1$ ナルトキハ有理數 x ニ対シ $\cosh \alpha x$ トナルコトヲ述ベタ。α ハ実常数トスル。

又雑誌函數方程式第四十一号ニテ上記(4)ノ函數方程式ト

(5) $\quad f^2(x+y)+f^2(x)+f^2(y)-2f(x)f(y)f(x+y)=1$

トノ関係ヲ矢張リ解析的性質ヲ假定セズニ論ジタガ、何レノ場合ニ於テモ、符号ノ吟味ガ困難トナリ、完全ニハ解決サレナイ。御研究アラバ御教示願ヒタイ。

序デナガラ雑誌函數方程式第四十一号ノ拙文ニ於テ 37P. 下カラ二行目「換言スレバ（容易ニ判ルヤウニ）$\{f^2(x)-1\}\{f^2(y)-1\}\neq 0$ ナル x, y ニ対シテハ」ト云フ文句ガアルガ、之ハ間違ヒデ且ツ餘計ナ文句デアルカラ、削除スル。

（追記）

$\boxed{\text{定理 I}}$ ニ於ケル南雲、角谷両先生ノ証明カラ容易ニ判

ルヌツニ、複素係数ヲ持ツn次ノ複素変数ノ多項式ノ特有性質ヲ導キ出スコトガ出来ル。

$\boxed{\text{多項式ノ特有性質}}$ $f(z)$ヲガウス平面上ニ於テ$|z|<+\infty$ニテ一價正則（即チ整函数）トスル。今ガウス平面上ニ任意ノ正$(n+1)$多角形ヲエガキ、ソノ$(n+1)$個ノ頂点ノ重心ヲPトシ、コノ正多角形ノ各頂点ノ$w=f(z)$ニヨツテノw平面ヘノ像点ヲ夫々$Q'_1, Q'_2, Q'_3, \cdots\cdots, Q'_{n+1}$トスルトキ，$f(P)$ガ$(n+1)$個ノ点$Q'_1, Q'_2, Q'_3, \cdots\cdots Q'_{n+1}$ノ重心ナラバ$f(z)$ハ高々$n$次ノ多項式デアル。

——（完）——